INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CONSTANŢA

MINISTERUL EDUCAŢIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE FIZICĂ * ETAPA LOCALĂ * 11 decembrie 2010

CLASA a XI - a * Bareme*

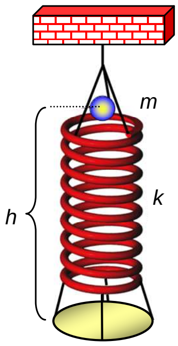
1. *Un resort vertical de constantă elastică $k = 60\,N/m$ are prins la capătul inferior prin fire subţiri un platan de masă neglijabilă, iar cu capătul superior este fixat de un suport. De la înălţimea $h = 5cm$ deasupra platanului este lăsată să cadă liber o bilă de masă $m = 600g$ (vezi figura alăturată). Ştiind că după ciocnirea cu platanul bila rămâne în contact cu acesta, determinaţi:*

a) legea de mişcare a bilei alegând sensul pozitiv vertical în jos şi momentul iniţial $(t = 0)$, momentul în care bila ciocneşte platanul;

b) viteza maximă atinsă de bilă;

c) timpul scurs între momentul în care este eliberată bila şi momentul în care ajunge, pentru prima oară, la distanţă maximă de punctul din care este lăsată să cadă liber.

Se neglijează frecările şi se consideră acceleraţia gravitaţională $g = 10\,m/s^2$.



.

Prof. Sorina Leu, Liceul Teoretic "Ovidius" Constanţa

a) Se determină poziţia de echilibru a bilei prin alungirea x_0 a resortului în această poziţie:

$$mg = kx_0 \text{, de unde: } x_0 = \frac{mg}{k}$$.**(0,5 puncte)**

În raport cu această poziţie bila va executa oscilaţii armonice de pulsaţie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ şi de perioadă: } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$.**(0,5 puncte)**

Deformarea maximă a resortului poate fi găsită din consideraţii energetice:

$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2}$$ **(1 punct)**

sau:

$$kx^2 - 2mgx - 2mgh = 0,$$

cu singura soluţie compatibilă fizic:

$$x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mgkh}}{k} = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)$$. **(0,5 puncte)**

Amplitudinea mişcării oscilatorii va fi :

$$A = x - x_0 = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}$$.**(0,5 puncte)**

Faza iniţială din legea de mişcare:

$$y = A\sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

o determinăm din condiţii iniţiale : la momentul $t = 0$, $y = -x_0$.

Rezultă: $-x_0 = A\sin\varphi_0$ şi $\varphi_0 = \arcsin\frac{-x_0}{A} = -\arcsin\frac{x_0}{A} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}}$.**(0,5 puncte)**

Legea care exprimă variaţia elongaţiei în raport cu timpul este deci:

$$y = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}}\right)$$ **(0,5 puncte)** şi înlocuind valorile numerice:

$$y = 0{,}1\sqrt{2}\,sin\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ (m)$$ **(0,5 puncte)**

b) Viteza maximă a bilei se poate scrie:

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{2gh}\cdot\sqrt{1 + \frac{mg}{2kh}}$$ **(1 punct)** şi înlocuind valorile numerice:

$$v_{max} = \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \approx 1{,}41\,m/s$$ **(0,5 puncte)**

Obs. Viteza maximă se poate calcula şi energetic: $mg(h + x_0) = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_{max}^2}{2}$

c) Timpul scurs între momentul în care este eliberată bila şi momentul în care ajunge, pentru prima oară, la distanță maximă de punctul din care este lăsată să cadă liber se poate exprima:

$t = t_1 + t_2 + t_3$, unde:

- t_1 este timpul în care bila cade liber: $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.**(0,5 puncte)**
- t_2 este timpul scurs din momentul în care bila atinge platanul şi momentul în care bila ajunge în poziția de echilibru, adică cea mai mică soluție pozitivă a ecuației:

$$0 = sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t - arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}}\right)$$, de unde: $t_2 = \sqrt{\frac{m}{k}}\,arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}}$ **(1 punct)**

- t_3 este timpul scurs din momentul în care bila ajunge din poziția de echilibru în poziția $y = A$, adică:

$$t_3 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$. **(0,5 puncte)**

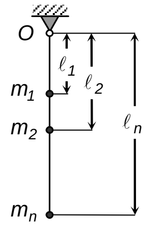
Deci timpul căutat va fi:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}}\left(arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}} + \frac{\pi}{2}\right)$$ **(0,5 puncte)** , iar cu valori numerice:

$$t = \frac{1}{10}\left(1 + 3\frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}34s$$.**(0,5 puncte)**

Total: 9 puncte + 1 punct din oficiu = 10 puncte
Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

2. *Pe o tijă subțire de masă neglijabilă, care se poate roti în jurul punctului O în care este suspendată, sunt fixate n corpuri mici de mase $m_1, m_2, \cdots, m_n$, la distanțele $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ de punctul de suspensie, ca în figură.*



a) Determinați perioada micilor oscilații ale sistemului.

b) Considerând acum că masele celor n corpuri sunt egale şi că ele sunt fixate echidistant pe tija de lungime L, ultimul corp fiind fixat la capătul inferior al tijei, stabiliți perioada micilor oscilații ale sistemului.

Dacă este necesar, puteți folosi:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ şi } 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

c) Folosind rezultatul obținut la punctul b), determinați perioada micilor oscilații ale unei tije cu masa uniform distribuită pe toată lungimea ei L.

prof. Nicolae Stănculete, Liceul Teoretic "Traian" Constanța

a) Principiul fundamental al dinamicii pentru solidul rigid în mişcare de rotație în jurul punctului O:

$$M_{(O)} = I_{(O)} \cdot \varepsilon \quad \textbf{(0,5 puncte)}$$

Momentul de inerție în raport cu punctul O este:

$$I_{(O)} = m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2 + \cdots + m_n\ell_n^2, \quad \textbf{(0,5 puncte)}$$

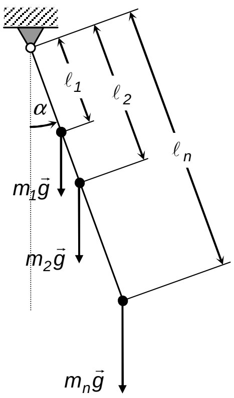
iar momentul greutăților corpurilor în raport cu punctul O:

$$M_{(O)} = -m_1g\ell_1 \sin\alpha - m_2g\ell_2 \sin\alpha - \cdots - m_ng\ell_n \sin\alpha = -(m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \cdots + m_n\ell_n)\cdot g\cdot \sin\alpha,$$

unde a fost pus semnul minus deoarece momentul greutăților tinde să rotească tija în sens contrar unghiului α **.(1 punct)**

Pentru unghiuri mici: $\sin\alpha \approx \alpha(\text{în rad.})$, deci:

$$M_{(O)} = -(m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \cdots + m_n\ell_n)\cdot g \cdot \alpha.$$



Înlocuind, se obține:

$$\varepsilon + \frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \cdots + m_n\ell_n}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2 + \cdots + m_n\ell_n^2}\cdot g\cdot\alpha = 0 \text{ sau:}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \cdots + m_n\ell_n}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2 + \cdots + m_n\ell_n^2}\cdot g\cdot\alpha = 0, \quad \textbf{(1 punct)}$$

relație care indică o mişcare oscilatorie armonică de pulsație:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \cdots + m_n\ell_n}{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2 + \cdots + m_n\ell_n^2}\cdot g} \text{ şi de perioadă:}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2 + \cdots + m_n\ell_n^2}{m_1\ell_1 + m_2\ell_2 + \cdots + m_n\ell_n}}. \quad \textbf{(1 punct)}$$

b) Pentru $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$ şi $\ell_1 = \ell$, $\ell_2 = 2\ell$, ..., $\ell_n = n\ell$, **(0,5 puncte)** formula care exprimă perioada devine:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\cdot\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}} \quad \textbf{(1 punct)}$$

Înlocuind sumele $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ şi ținând cont că $\ell = \frac{L}{n}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\cdot\frac{2n+1}{3n}}. \quad \textbf{(1 punct)}$$

c) Tija omogenă poate fi considerată o tijă de masă neglijabilă cu un număr foarte mare ($n \to \infty$) de corpuri identice fixate echidistant pe toată lungimea ei.

Deci, pentru a găsi perioada micilor oscilații ale unei tije cu masa uniform distribuită pe toată lungimea ei L, facem în expresia perioadei găsită la punctul b) $n \to \infty$ **.(0,5 puncte)**

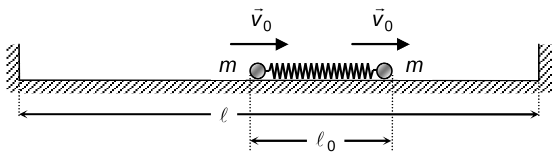
Relația se poate scrie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}}{3}} \quad \textbf{.(1 punct)}, \text{ în care dacă } n\to\infty, \ \frac{1}{n}\to 0 \text{ şi se obține:}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}. \quad \textbf{(1 punct)}$$

Total: 9 puncte + 1 punct din oficiu = 10 puncte
Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

3. *Sistemul din figură, cu lungimea $\ell_0 = 20cm$, este format din două bile identice având fiecare masa $m = 100g$, legate printr-un resort nedeformat de constantă elastică $k = 20\,N/m$,. Cele două bile se deplasează uniform cu viteze identice $v_0 = 1m/s$ pe un suport orizontal neted (fără frecări) între doi pereți verticali, situați la o distanță $\ell = 100cm$ unul de altul, pe o direcție perpendiculară pe aceştia (vezi fig.alăturată).*



Ciocnirile bilelor cu pereții sunt perfect elastice şi instantanee.

a) Descrieți interacțiunile sistemului cu pereții.

b) Determinați timpul scurs între momentul în care sistemul se află în poziția din figură şi momentul în care , interacționând succesiv cu cei doi pereți, sistemul ajunge din nou, pentru prima dată, în această poziție.

c) Determinați lungimea minimă a sistemului precum şi lungimea drumului parcurs de fiecare dintre cele două bile în timpul determinat la punctul b).

prof. Anton Pantelimon, Colegiul Tehnic "Tomis" Constanța

a) Deoarece vitezele celor două bile sunt egale, până în momentul în care bila din dreapta ciocneşte peretele, resortul nu se deformează. **(0,5 puncte)**

Prin ciocnirea perfect elastică cu peretele viteza bilei îşi schimbă sensul, fără a-şi modifica modulul, astfel încât, imediat după ciocnire, cele două bile vor avea vitezele egale şi de sens contrar v_0, impulsul sistemului fiind nul. **(1 punct)**

Bilele se vor apropia una de cealaltă cu viteze care vor scădea în timp rămânând însă egale în modul, comprimând resortul, iar centrul de masă (mijlocul resortului) nu se va deplasa față de pereți, deoarece impulsul sistemului se conservă şi rămâne permanent nul. **(0,5 puncte)**

Din acelaşi considerent şi în timpul în care, după ce bilele îşi anulează vitezele, resortul revine la forma nedeformată, centrul de masă al sistemului nu-şi modifică poziția față de pereți. **(0,5 puncte)**

Conform legilor conservării energiei şi impulsului, în momentul în care resortul a revenit la forma nedeformată vitezele bilelor vor ajunge la valoarea v_0, iar bila din dreapta atinge peretele ciocnindu-l elastic încă odată, viteza acesteia schimbându-şi sensul. **(1 punct)**

După această a doua ciocnire elastică a bilei din dreapta cu peretele cele două bile vor avea vitezele orientate spre stânga egale cu v_0, iar resortul va fi nedeformat, sistemul mişcându-se cu această viteză până ce bila din stânga atinge celălalt perete, unde procesul de interacțiune cu acesta se va desfăşura la fel. **(0,5 puncte)**

b) Timpul scurs între momentul în care sistemul se află în poziția din figură şi momentul în care , interacționând succesiv cu cei doi pereți, sistemul ajunge din nou, pentru prima dată, în această poziție va fi suma dintre timpul în care resortul se comprimă şi revine la forma nedeformată în procesele de interacțiune cu cei doi pereți şi timpul în care sistemul cu resortul nedeformat parcurge cu viteza v_0 distanța $2(\ell - \ell_0)$.

Timpul în care resortul se comprimă şi revine la forma nedeformată în procesul de interacțiune cu un perete va fi jumătate din perioada de oscilație a fiecăreia dintre bile, deci pentru cele două interacțiuni cu cei doi pereți timpul va fi egal cu perioada de oscilație a fiecărei bile. Cum față de centrul de masă jumătățile de resort care se deformează au constantele $2k$, rezultă :

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ **(1 punct)** şi deci timpul căutat este :

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} + \frac{2(\ell - \ell_0)}{v_0} \approx 1{,}914s$$ **.(1 punct)**

c) Lungimea minimă a sistemului va fi:

$\ell_{\min} = \ell_0 - 2A$, unde A este amplitudinea de oscilație pe care o determinăm din legea conservării energiei pentru oscilatorul format din jumătate de resort şi una din bile :

$\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{2kA^2}{2}$, de unde : $A = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ **.(1 punct)**

$$\ell_{\min} = \ell_0 - 2v_0\sqrt{\frac{m}{2k}} = 10cm$$ **.(0,5 puncte)**

Fiecare dintre cele două bile vor parcurge distanța $2(\ell - \ell_0)$ la care se adaugă lungimea drumurilor parcurse de fiecare bilă în timpul oscilațiilor:

$$d = 2(\ell - \ell_0) + 4A$$ **,(1 punct)**

Rezultă :

$$d = 2(\ell - \ell_0) + 4v_0\sqrt{\frac{m}{2k}} = 1{,}8m$$ **.(0,5 puncte)**

Total: 9 puncte + 1 punct din oficiu = 10 puncte
Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.